Topología de subespacio

Proposición. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y sea $Y \subset X$.
La familia $\mathcal{T}_Y = \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{T}\}$ es una topología sobre Y,

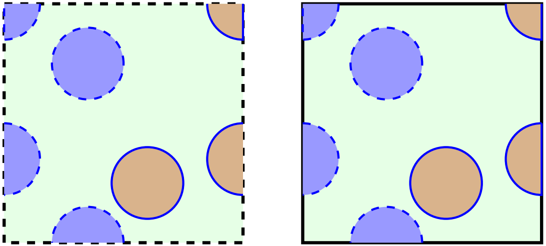
Demostración. **a)** $Y = X \cap Y \in \mathcal{T}_Y$ pues $X \in \mathcal{T}$, y $\emptyset = \emptyset \cap Y \in \mathcal{T}_Y$ pues $\emptyset \in \mathcal{T}$.
b) Sea $\{V_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{T}_Y \Rightarrow$ para todo $i \in I$ existe $U_i \in \mathcal{T}$ tal que $V_i = U_i \cap Y \Rightarrow$ $\bigcup_{i\in I} V_i = \bigcup_{i\in I}(U_i \cap Y) = (\bigcup_{i\in I} U_i) \cap Y \in \mathcal{T}_y$ pues $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$.
c) Sea $\{V_1, V_2, \ldots, V_n\} \subset \mathcal{T}_Y \Rightarrow$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ existe $U_i \in \mathcal{T}$ tal que $V_i = U_i \cap Y \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n V_i = \bigcap_{i=1}^n (U_i \cap Y) = (\bigcap_{i=1}^n U_i) \cap Y \in \mathcal{T}_y$ pues $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$.

La topología $\mathcal{T}_Y$ se denomina **topología de subespacio** o **topología relativa** en Y.

Diremos que $A \subset Y$ es abierto (resp. cerrado) en Y, si es abierto (resp. cerrado) en $\mathcal{T}_Y$.

Proposición. Sea $Y \subset X$. Entonces $A \subset Y$ es cerrado en Y si y solo si existe C cerrado de X tal que con $A = C \cap Y$.

Demostración. Inmediata teniendo en cuenta que $(X \setminus U) \cap Y = Y \setminus (U \cap Y)$.



Conjuntos abiertos (azul) y cerrados (marrón) en Y.

Base de la topología de subespacio

Proposición. Si $\mathcal{B}$ es una base para la topología $\mathcal{T}$ de X, entonces la familia $\mathcal{B}_Y = \{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}\}$ es una base para la topología $\mathcal{T}_Y$.

Demostración. Sea V abierto en Y e $y \in V$. Existe U abierto en X tal que $V = U \cap Y$. Como $y \in U$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $y \in B \subset U$. Entonces $y \in B \cap Y \subset U \cap Y = V$. Por tanto, $\mathcal{B}_Y$ es una base para $\mathcal{T}_Y$.

Ejemplo. Consideramos $\mathbb{R}$ con la topología usual y $X = [0,1] \subset \mathbb{R}$. Una base de $\mathcal{T}_X$ sería $\mathcal{B} = \{(a,b) \mid 0 \leq a < b \leq 1\} \cup \{[0,b) \mid 0 < b \leq 1\} \cup \{(a,1] \mid 0 \leq b < 1\}$.

Ejemplo. Si consideramos $\mathbb{R}$ con la topología usual y $X = \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$, la topología de subespacio en $\mathbb{Z}$ es la topología discreta.

Ejemplo. Consideramos $\mathbb{R}$ con la topología usual y $X = [-1,1] \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}$. Entonces $[-1,0)$ y $(0,1]$ son abiertos en X, y también son cerrados.

Ejemplo. Consideramos $\mathbb{R}^2$ con la topología usual y $X = S^1 \subset \mathbb{R}^2$. Una base de la topología de subespacio en S^1 está formada por intervalos abiertos de S^1.

Ejemplo. Consideramos $\mathbb{R}^3$ con la topología usual y $X = S^2 \subset \mathbb{R}^2$. Una base de la topología de subespacio en S^2 está formada por discos abiertos de S^2.

Adherencia, interior,... en la topología de subespacio

Proposición. Sean Y un subespacio de X y A un subconjunto de Y. Sea $\bar{A}_X$ la adherencia de A en X y sea $\bar{A}_Y$ la adherencia de A en Y. Entonces $\bar{A}_Y = \bar{A}_X \cap Y$.

Demostración. $\subset$) Como $\bar{A}_X \cap Y$ es cerrado en Y y contiene a $A \Rightarrow \bar{A}_Y \subset \bar{A}_X \cap Y$.
$\supset$) Como $\bar{A}_Y$ es cerrado en Y existe $B \subset X$ cerrado en X tal que $\bar{A}_Y = B \cap Y$.
Como $A \subset \bar{A}_Y \subset B$ cerrado de X, se tiene $\bar{A}_X \subset B$. Por tanto $\bar{A}_X \cap Y \subset B \cap Y = \bar{A}_Y$.

Ejercicio 1. Sea $\mathbb{R}$ con la topología usual. Calcula como son los elementos de la topología de subespacio en Y, y el interior y la adherencia de A en Y en los siguientes casos:

a) $Y = [0,2]$, $A = (0,1)$ **b)** $Y = (0,2)$, $A = (0,1)$
c) $Y = [0,2] \setminus \{1\}$, $A = (0,1)$ **d)** $Y = [0,2] \cup (3,4)$, $A = [0,2]$, $B = (3,4)$.

Solución: **a)** $\mathring{A}_Y = (0,1)$, $\bar{A}_Y = [0,1]$, **b)** $\mathring{A}_Y = (0,1)$, $\bar{A}_Y = (0,1]$,
c) $\mathring{A}_Y = (0,1)$, $\bar{A}_Y = [0,1)$, **d)** $\mathring{A}_Y = \bar{A}_Y = [0,2]$, $\mathring{B}_Y = \bar{B}_Y = (3,4)$.

Ejercicio 2. ¿Qué relación hay entre $\mathring{A}_Y$ y $\mathring{A}_X \cap Y$, y entre $\mathrm{Fr}_Y(A)$ y $\mathrm{Fr}_X(A) \cap Y$?

Solución: Se tiene $\mathring{A}_X \cap Y \subset \mathring{A}_Y$ (por $A \supset \mathring{A}_X \cap Y$ abierto en Y) y $\mathrm{Fr}_Y(A) \subset \mathrm{Fr}_X(A) \cap Y$ (pues $\mathrm{Fr}_Y(A) = \bar{A}_Y \setminus \mathring{A}_Y \subset (\bar{A}_X \cap Y) \setminus (\mathring{A}_X \cap Y) = (\bar{A}_X \setminus \mathring{A}_X) \cap Y = \mathrm{Fr}_X(A) \cap Y$).
En general no se tiene la igualdad. por ejemplo, si $X = \mathbb{R}$, $Y = [0,2)$, $A = [0,1)$, se tiene $\mathring{A}_Y = [0,1)$, $\mathring{A}_X \cap Y = (0,1)$, $\mathrm{Fr}_Y(A) = \{1\}$, $\mathrm{Fr}_X(A) \cap Y = \{0,1\}$.

Topología de subespacio. Otras propiedades.

Proposición. Sea Y un subespacio de X y $A \subset Y$. Entonces:

a) Si Y es abierto en X: A es abierto en Y si y solo si A es abierto en X.

b) Si Y es cerrado en X: A es cerrado en Y si y solo si A es cerrado en X.

Demostración. A abierto en $X \Rightarrow A = A \cap Y$, abierto en Y.
A abierto en $Y \Rightarrow A = U \cap Y$, con U abierto de $X \Rightarrow A$ intersección de abiertos de X.
A cerrado en $Y \Rightarrow A = A \cap Y$, cerrado en Y.
A cerrado en $Y \Rightarrow A = F \cap Y$, con F cerrado de $X \Rightarrow A$ intersección de cerrados de X.

Proposición. Sea Y un subespacio de X T_2. Entonces Y es T_2.

Demostración. Sean $x, y \in A$, $x \neq y$. Como X es T_2 existen U y V entornos abiertos de x e y, respectivamente, en X tales que $U \cap V = \emptyset$. Entonces $U \cap Y$ y $V \cap Y$ son entornos abiertos de x e y, respectivamente, en Y tales que $(U \cap Y) \cap (V \cap Y) = \emptyset$. Luego Y es T_2.

Proposición. Sea $X = A \cup B$, con A y B ambos abiertos (o ambos cerrados) en X. Sean $f : A \longrightarrow Y$ y $g : B \longrightarrow Y$ continuas tales que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A \cap B$. Entonces $h : X \longrightarrow Y$ dada por $h(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in A \\ g(x) \text{ si } x \in B \end{cases}$ está bien definida y es continua.

Inclusiones, restricciones y extensiones

Proposición. Sean X, Y, Z espacios topológicos.

a) Si $A \subset X$, la función inclusión $i : A \hookrightarrow X$ es continua (en A consideramos la topología de subespacio de X).

b) Si $f : X \longrightarrow Y$ es continua y $A \subset X$, la función restringida $f|_A : A \longrightarrow Y$ es continua (en A consideramos la topología de subespacio de X).

c) Si $f : X \longrightarrow Y$ es continua e $Y \subset Z$, la función $g : X \longrightarrow Z$, obtenida al extender el rango de f, es continua (en Y consideramos la topología de subespacio de Z).

d) Si $f : X \longrightarrow Y$ es continua y $f(X) \subset B \subset Y$, la función $h : X \longrightarrow B$, obtenida al restringir el rango de f, es continua (en B tomamos la topología de subespacio de Y).

Demostración. a) Si V es abierto de X, $i^{-1}(V) = V \cap A$ que es abierto en A.

b) Basta observar que $f|_A : A \overset{i}{\hookrightarrow} X \xrightarrow{f} Y$.

c) Basta observar que $g : X \xrightarrow{f} Y \overset{i}{\hookrightarrow} Z$.

d) Sea $V \subset Z$ abierto en Z. Entonces existe $W \subset Y$ abierto de Y tal que $V = W \cap Z$. Entonces $h^{-1}(V) = f^{-1}(W)$ es abierto de X por ser f continua.

Observación. Dado X espacio topológico y dado $A \subset X$, la topología de subespacio en X es la topología menos fina para la que la inclusión $i : A \hookrightarrow X$ continua.

Inmersiones topológicas

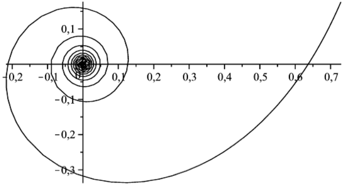
Sean X e Y espacios topológicos y sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación continua inyectiva. Entonces, la función $f' : X \longrightarrow f(X)$ (con la topología de subespacio en $f(X)$) obtenida al restringir el rango de f, es biyectiva. Si f' es un homeomorfismo de X con $f(X)$, decimos que la aplicación $f : X \longrightarrow Y$ es una inmersión topológica.

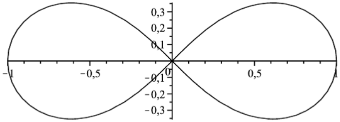
Ejercicio 4. Sean $f_1 : [0, \pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f_2 : [0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f_3 : \left(0, \frac{3}{4}\right) \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f_4 : [0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2$, dadas por:

$$f_1(t) = f_2(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t),$$

$$f_3(t) = \left(t \sin\left(\frac{1}{t}\right), t\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right),$$

$$f_4(t) = \left(\frac{\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}{1+\operatorname{sen}^2\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}, \frac{\operatorname{sen}\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}{1+\operatorname{sen}^2\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}\right).$$





¿Cuales de ellas es una inmersión topológica?

¿Y si consideramos $f_3 : \left[0, \frac{3}{4}\right] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definiendo $f_3(0) = 0$?

Ejercicios de topología de subespacio

Ejercicio 5. Sea $Y = (0,5]$. ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos de Y son abiertos y cuáles son cerrados en Y con la topología usual (es decir, como subespacio de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$? ¿Y con la topología de subespacio de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[,)})$?
a) $(0,1)$, **b)** $(0,1]$, **c)** $\{1\}$, **d)** $(0,5]$, **e)** $(1,2)$, **f)** $[1,2)$, **g)** $(1,2]$, **h)** $(4,5]$, **i)** $[4,5]$.

Solución: Con la topología usual $(0,1)$, $(0,5]$, $(1,2)$ y $(4,5]$ son abiertos en Y, y $(0,1]$, $\{1\}$, $(0,5]$, $[1,2]$, $[4,5]$ son cerrados en Y.
Por otra parte, teniendo en cuenta que los intervalos $[a,b)$ y (a,b) son conjuntos abiertos y cerrados en $\mathcal{T}_{[,)}$, y que los intervalos $[a,b)$, $[a,b]$, y los conjuntos unipuntuales $\{a\}$ son conjuntos cerrados en $\mathcal{T}_{[,)}$, se tiene que $(0,1)$, $(0,5]$, $(1,2)$, $[1,2)$, $(4,5]$ y $[4,5]$ son abiertos en Y, y $(0,1)$, $(0,1]$, $\{1\}$, $(0,5]$, $[1,2)$ y $[4,5]$ son cerrados en Y.

Ejercicio 6. Sea $Y = (0,4] \cup \{5\}$. ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos de Y son abiertos y cuáles son cerrados en Y con la topología usual?
a) $(0,1)$, **b)** $(0,1]$, **c)** $\{1\}$, **d)** $(0,4]$, **e)** $[1,4)$, **f)** $(1,4]$, **g)** $[1,4]$, **h)** $\{4\}$, **i)** $\{4,5\}$.

Solución: Abiertos: $(0,1)$, $(0,4]$, $(1,4]$.
Cerrados: $(0,1]$, $\{1\}$, (d) $(0,4]$, $[1,4]$, $\{4\}$, $\{4,5\}$.

Ejercicios de topología de subespacio

Ejercicio 7. Sea $X = A \cup B$ donde $A = \left\{ \left(x, \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \right) \mid 0 < x < 1 \right\}$ y $B = \{0\} \times [0,1]$. ¿Es A o B cerrado (o abierto) en X?

Solución: A es abierto en X pues $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\} \cap X$, con $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ abierto de $\mathbb{R}^2$.
B es cerrado en X pues su complementario en X es A, que es abierto (o bien, porque $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\} \cap X$, con $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$ cerrado de $\mathbb{R}^2$).
A no es cerrado en X pues $(0,0) \in \bar{A}_X \setminus A$.
B no es abierto en X pues su complementario en X es A que no es cerrado.

Ejercicio 8. Probar que si $f : X \longrightarrow Y$ es un homeomorfismo y $A \subset X$ entonces $A \simeq f(A)$.
En particular, si $\{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ entonces $X \setminus \{x_1, \dots, x_n\} \simeq Y \setminus \{f(x_1), \dots, f(x_n)\}$.

Solución: Sea $g = f|_A : A \longrightarrow f(A)$, que es biyectiva, y:
- g es continua: Si V es abierto de $f(A)$, existe V' abierto de Y tal que $V = V' \cap f(A)$. Entonces $g^{-1}(V) = f^{-1}(V') \cap A$, abierto en A pues $f^{-1}(V')$ es abierto en X.
- g^{-1} es continua: Si U es abierto de A, existe U' abierto de X tal que $U = U' \cap A$. Entonces $g(U) = f(U') \cap f(A)$, abierto en $f(A)$ pues $f(U')$ es abierto en Y.

Ejercicios de topología de subespacio

Ejercicio 9. Probar que, con la topología usual (como subespacios de $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{R}^2$),
a) $(0,1)$ es homeomorfo a $\mathbb{R}$.
b) $[0,1)$ es homeomorfo a $[0,\infty)$.
c) $[0,\infty)\times[0,\infty)$ es homeomorfo a $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1, x\geq 0, y\geq 0\}$.

Solución: **a)** Un homeomorfismo $f : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ viene dado por $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{2x-1}{x(x-1)}$ que es continua en (0,1), biyectiva (pues es monótona) y su inversa es continua.

b) Un homeomorfismo $f : [0,\infty) \longrightarrow [0,1)$ viene dado por $f(x)=1-e^{-x}$:
- f es biyectiva, pues f es estrictamente creciente (pues $f'(x)=e^{-x}>0$), $f(0)=0$ y $\lim_{x\to\infty} f(x)=1$.
-f es continua
-$f^{-1} : [0,1) \longrightarrow [0,\infty)$ viene dada por $f^{-1}(x)=-\ln(1-x)$ continua en $[0,1)$.
Otros posibles homeomorfismos serían $g(x)=e^{-\frac{1}{x}}$ y $h(x)=\dfrac{x}{x+1}$.

c) Un homeomorfismo $f : [0,\infty)\times[0,\infty) \longrightarrow \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1, x\geq 0, y\geq 0\}$ viene dado, en coordenadas polares, por $f(\rho,\theta)=(1-e^{-\rho},\theta)$.

Topología producto

Proposición. Dados $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{T}')$ espacios topológicos, consideramos la familia $\mathcal{B} = \{U \times V \mid U \in \mathcal{T}, V \in \mathcal{T}'\}$. Entonces $\mathcal{B}$ es una base de topología.

Demostración. a) Para todo $(x, y) \in X \times Y$, se tiene que $(x, y) \in X \times Y \in \mathcal{B}$.
b) Si $(U \times V), (U' \times V') \in \mathcal{B}$, entonces $(U \times V) \cap (U' \times V') = (U \cap U') \times (V \cap V') \in \mathcal{B}$.

La topología que induce se llama **topología producto** sobre $X \times Y$ y se denota $\mathcal{T} \times \mathcal{T}'$.

Proposición. Si $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ son bases para las topología de X e Y, respectivamente, $\mathcal{B} = \{B_1 \times B_2 \mid B_1 \in \mathcal{B}_1, B_2 \in \mathcal{B}_2\}$ es una base para la topología producto sobre $X \times Y$.

Demostración. Dado W abierto de $X \times Y$ y dado $(x, y) \in W$, por definición de la topología producto existe un abierto básico $U \times V$ tal que $(x, y) \in U \times V \subset W$.
Puesto que $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ son bases para X e Y, respectivamente, existen $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset U$, y existe $B' \in \mathcal{B}'$ tal que $y \in B' \subset V$. Por tanto, $(x, y) \in B \times B' \subset W$.

Ejemplo. La topología usual de $\mathbb{R}^2$ coincide con $\mathcal{T}_u \times \mathcal{T}_u$ ($\mathcal{T}_u$ topología usual de $\mathbb{R}$).

Observación. Todo lo que veamos en esta sección se puede generalizar a productos finitos de la forma $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$.

Topología producto

Proposición. Si A es un subespacio de X y B es un subespacio de Y, la topología producto en $A \times B$ coincide con la topología de $A \times B$ como subespacio de $X \times Y$.

Demostración. Los abiertos de la base de la topología producto sobre $A \times B$ son de la forma $(U \cap A) \times (V \cap B)$, con U abierto de X y V abierto de Y.
Los abiertos de la base de la topología que $A \times B$ hereda como subespacio de $X \times Y$ son de la forma $(U \times V) \cap (A \times B)$, con U abierto de X y V abierto de Y.
El resultado es consecuencia de que $(U \cap A) \times (V \cap B) = (U \times V) \cap (A \times B)$.

Ejemplo. Sea $X = [0,1]$, $Y = S^1$ con la topología de subespacios de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$, resp. $\Rightarrow X \times Y$ es homeomorfo a un anillo con la topología de subespacio de $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo. Sea $X = Y = S^1$ con la topología de subespacio de $\mathbb{R}^2 \Rightarrow X \times Y$ es homeomorfo a un toro (hueco) con la topología de subespacio de $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo. Sea $X = D^2$ (disco unidad) e $Y = S^1$ con la topología de subespacio de $\mathbb{R}^2 \Rightarrow X \times Y$ es homeomorfo a un toro macizo con la topología de subespacio de $\mathbb{R}^3$.

Topología producto

Proposición. Sean A un subespacio de X y B un subespacio de Y. Si A y B son ambos abiertos (resp. cerrados) entonces $A \times B$ es abierto (resp. cerrado) en $X \times Y$.

Demostración. Ejercicio.

Proposición. Si A es un subespacio de X y B es un subespacio de Y $\Rightarrow \overset{\circ}{\widehat{A \times B}} = \mathring{A} \times \mathring{B}$ y $\overline{A \times B} = \bar{A} \times \bar{B}$.

Demostración (para la adherencia). Como $\bar{A} \times \bar{B}$ es cerrado se tiene $\overline{A \times B} \subset \bar{A} \times \bar{B}$. Por otro lado, si $(x, y) \in \bar{A} \times \bar{B}$ y $U \times V$ es un abierto básico que contiene a (x, y), como $x \in \bar{A}$ existe $x' \in U \cap A$ y como $y \in \bar{B}$ existe $y' \in V \cap B$. Entonces $(x', y') \in (U \cap A) \times (V \cap B) = (U \times V) \cap (A \times B)$. Por tanto, $(x, y) \in \overline{A \times B}$.

Ejercicio. ¿Se cumple $\mathrm{Fr}(A \times B) = \mathrm{Fr}(A) \times \mathrm{Fr}(B)$?

Proposición. El producto de dos espacios T_2 es un espacio T_2.

Topología producto

Proposición. Sean X, Y espacios topológicos y consideremos en $X \times Y$ la topología producto. Sean $\pi_1 : X \times Y \longrightarrow X$ y $\pi_2 : X \times Y \longrightarrow Y$ las proyecciones sobre el primer y segundo factor, respectivamente.
Entonces π_1 y π_2 son aplicaciones continuas.

Demostración. Basta ver que si U y V son abiertos de X e Y, respectivamente, entonces $\pi_1^{-1}(U) = U \times Y$ y $\pi_2^{-1}(V) = X \times V$ son abiertos de $X \times Y$.

Teorema. Sea $f : A \longrightarrow X \times Y$ tal que $f(a) = (f_1(a), f_2(a))$ para cada $a \in A$. Entonces f es continua si y solo si las funciones $f_1 : A \longrightarrow X$ y $f_2 : A \longrightarrow Y$ son continuas.
Las aplicaciones f_1 y f_2 se llaman funciones coordenadas de f.

Demostración. $\Rightarrow$) Como $f_1 = \pi_1 \circ f$ y $f_2 = \pi_2 \circ f$ y f es continua, f_1 y f_2 son continuas.
$\Leftarrow$) Supongamos que f_1 y f_2 son continuas. Sea $U \times V$ un abierto básico de la topología de $X \times Y$ y consideremos $f^{-1}(U \times V)$. Se tiene que $a \in f^{-1}(U \times V)$ si y solo si $f(a) \in U \times V$, esto es, si y solo si $f_1(a) \in U$ y $f_2(a) \in V$. Por tanto, $f^{-1}(U \times V) = f_1^{-1}(U) \cap f_2^{-1}(V)$ que es intersección de abiertos, y por tanto abierto.

Observación. Dados X, Y espacios topológicos, la topología producto en $X \times Y$ es la topología menos fina para la que las proyecciones $\pi_1 : X \times Y \longrightarrow X$ y $\pi_2 : X \times Y \longrightarrow Y$ continuas.

Topología producto (para productos infinitos)

Dada $\{X_i\}_{i\in I}$ familia de espacios topológicos, sea

$$X = \prod_{i\in I} X_i = \{(x_i)_{i\in I} \mid x_i \in X_i \text{ para todo } i \in I\}.$$

Sea $\mathcal{B}_1 = \{\prod_{i\in I} U_i \mid U_i \text{ abierto en } X_i \text{ para cada } i \in I\}$.
$\mathcal{B}_1$ es una base de topología que genera la **topología por cajas** en X.

Sea $\mathcal{B}_2 = \{\prod_{i\in I} U_i \mid U_i \text{ abierto en } X_i, \forall i \in I, U_i = X_i, \forall i \in I \text{ excepto un número finito}\}$.
$\mathcal{B}_2$ es una base de topología que genera la **topología producto** en X.

Proposición. La topología por cajas es, en general, más fina que la topología producto. Para productos finitos ambas coinciden.
Siempre que consideremos un producto de espacios topológicos, lo supondremos con la topología producto, a menos que específicamente establezcamos lo contrario.

Proposición. Sea $X = \prod_{i\in I} X_i$, y sea $\mathcal{B}_i$ base de la topología en X_i. Entonces:
a) La familia $\{\prod_{i\in I} B_i \mid B_i \in \mathcal{B}_i\}$ es una base para la topología por cajas sobre X.
b) La familia $\{\prod_{i\in I} B_i \mid B_i \in \mathcal{B}_i, \forall i \in \{i_1, i_2, \dots i_k\}, B_i = X_i, \forall i \notin \{i_1, i_2, \dots i_k\}\}$ es una base para la topología producto sobre X.

Topología producto (para productos infinitos)

Las propiedades que cumple la topología producto en el caso finito referentes a subespacios, adherencia y axioma T_2 se extienden al caso de las topologías por cajas y producto en el caso infinito.

Proposición. Sea $A_i \subset X_i$, para cada $i \in I$, y sea $A = \prod_{i \in I} A_i \subset \prod_{i \in I} X_i = X$. Consideremos en X la topología por cajas (resp. producto).
Entonces la topología de A como subespacio de X coincide con topología por cajas (resp. producto) de A como producto de espacios topológicos.

Proposición. Sea $X = \prod_{i \in I} X_i$ un producto de espacios T_2. Entonces X es T_2 en las topologías por cajas y producto.

Proposición. Sea $A_i \subset X_i$, para cada $i \in I$ y sea $A = \prod_{i \in I} A_i \subset \prod_{i \in I} X_i = X$. Consideremos en X la topología por cajas (resp. producto).
Entonces $\bar{A} = \prod_{i \in I} \overline{A_i}$.

Topología producto (para productos infinitos)

En cambio el hecho de que una función sea continua si y solo si lo es cada una de sus funciones componentes solo se cumple para la topología producto.

Teorema. Sea $f : X \longrightarrow Y = \prod_{i \in I} Y_i$ dada por la ecuación $f(x) = (f_i(x))_{i \in I}$, donde $f_i : X \longrightarrow Y_i$ para cada $i \in I$. Consideremos en Y la topología producto.
Entonces f es continua si y solo si cada función f_i es continua.

Demostración. $\Rightarrow$) Sea π_i la proyección del producto sobre su factor i-ésimo, que es claramente una función continua. Así, si $f : A \longrightarrow \Pi X_i$ es continua, se tiene que $f_i = \pi_i f$ es composición de funciones continuas y por tanto es continua.
$\Leftarrow$) Sea $V = \prod_{i \in I} V_i$ abierto de $Y \Rightarrow$ existe $i_1, i_2, \ldots, i_k$ tal que V_i abierto de Y_i si $i \in \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$, y $V_i = Y_i$ si $i \notin \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \Rightarrow f^{-1}(V) = \bigcap_{i \in I} U_i$, donde $U_i = f_i^{-1}(V_i)$ abierto de X si $i \in \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$, y $U_i = f_i^{-1}(Y) = X$ si $i \notin \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \Rightarrow f^{-1}(V)$ es una intersección finita de abiertos de X y por tanto es abierto en X.

Observación. El teorema anterior no se cumple para la topología por cajas.
Por ejemplo, si consideremos $\mathbb{R}^\omega = \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{R}$, y $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^\omega$ dada por $f(t) = (t, t, t, \ldots)$, entonces cada función coordenada de f es continua pero f no es continua si consideramos en $\mathbb{R}^\omega$ la topología por cajas, pues $f^{-1}((-1,1) \times (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \times \ldots) = \{0\}$ que no es abierto en $\mathbb{R}$.

Ejercicios de topología producto

Ejercicio 10. En el espacio producto $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[\,)}) \times (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[\,)})$ describir la topología inducida en los subconjuntos $X = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$ e $Y = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$.

Solución: $\mathcal{T}_X = \mathcal{T}_d$ (la topología discreta), pues $([x, x+1) \times [-x, -x+1)) \cap X = \{(x, -x)\}$ y por tanto los conjuntos unipuntuales son abiertos.
Por otra parte, $(Y, \mathcal{T}_Y) \simeq (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[\,)})$ pues dado un abierto básico $[a, b) \times [c, d)$ se tiene que $([a, b) \times [c, d)) \cap Y$ o es vacío o es un intervalo de la forma $\{(x, x) \mid e \leq x < f\}$.

Ejercicio 11. Sean X e Y espacios topológicos. Dado $U \subset X \times Y$, $x \in X$, $y \in Y$, sean $U_x = \{y \in Y \mid (x, y) \in U\}$ y $U_y = \{x \in X \mid (x, y) \in U\}$. Demostrar que si U es abierto en $X \times Y$, U_x y U_y son abiertos en Y y en X, resp., para cada $x \in X$ y cada $y \in Y$. ¿Es cierto el recíproco?

Solución: Sea $(x_0, y_0) \in X \times Y$, y sea $y \in U_{x_0}$. Entonces $(x_0, y) \in U$ y por U abierto existen A abierto en X y B abierto en Y tales que $(x_0, y) \in A \times B \subset U$. Esto implica que $\{x_0\} \times B \subset U$ y por tanto $x_0 \in A \subset U_{x_0}$. Luego U_{x_0} es abierto de Y.
Por simetría, se tiene que U_{y_0} es abiertos de X.
Finalmente, puede ocurrir que U_x y U_y sean abiertos para cada $x \in X$ y cada $y \in Y$, y sin embargo U no ser abierto en $X \times Y$.

Ejercicios de topología producto

Ejercicio 12. Sea $\mathcal{B}_1 = \{\{a\} \times (b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$. Demuestra que $\mathcal{B}_1$ es base de una topología producto en $\mathbb{R}^2$. Estudia si la topología generada por $\mathcal{B}_1$ es T_2.

Solución: $\mathcal{B}_1$ es la base de la topología producto en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_d) \times (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$.
$\mathcal{T}_1$ es T_2 pues tanto $\mathcal{T}_d$ como $\mathcal{T}_u$ lo son.

Ejercicio 13. Demostrar que X es T_2 si y sólo si $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ es cerrado en $X \times X$.

Solución: X es $T_2 \Leftrightarrow$ para cualesquiera $x, y \in X$, $x \neq y$, existen U, V entornos de x e y tales que $U \cap V = \emptyset \Leftrightarrow$ para cada par $(x, y) \in X \times X \setminus \Delta$, existe $U \times V$ entorno de (x, y) tal que $(U \times V) \cap \Delta = \emptyset \Leftrightarrow X \times X \setminus \Delta$ es abierto $\Leftrightarrow \Delta$ es cerrado.

Ejercicio 14. Sean $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas. Probar que son continuas: **a)** $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, **b)** $(fg)(x) = f(x)g(x)$, **c)** $h(x) = f(x)/g(x)$ si $g(x) \neq 0$ para todo $x \in X$.

Solución: Sea $F : X \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dada por $F(x) = (f(x), g(x))$, que es una función continua por serlo f y g.
Sean $S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $P : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ y $D : \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por $S(x, y) = x + y$, $P(x, y) = xy$ y $D(x, y) = x/y$, que sabemos que son continuas.
Entonces $f + g = S \circ F$, $fg = P \circ F$ y $h = D \circ F$ son también funciones continuas.

Ejercicios de topología producto

Ejercicio 15. Demostrar que si $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas, entonces el conjunto $A = \{x \in X : f(x) \leq (g(x))^2\}$ es cerrado.

Solución: Sea $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(x) = f(x) - (g(x))^2$ que es continua por serlo f y g. Entonces $A = \{x \in X : f(x) \leq (g(x))^2\} = \{x \in X : f(x) - (g(x))^2 \leq 0\} = \{x \in X : h(x) \leq 0\} = h^{-1}((-\infty, 0])$ es cerrado por ser la imagen inversa de un conjunto cerrado por una aplicación continua.

Ejercicio 16. Dar un ejemplo de una función continua $f : X \longrightarrow Y$ cuyo grafo $\{(x, f(x)) : x \in X\}$ no sea cerrado en $X \times Y$ y de una función no continua cuyo grafo sí lo sea. *Indicación*: Pensar en la identidad de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ poniendo topologías adecuadas en el espacio de salida y en el de llegada.

Solución: Sea $\mathrm{Id} : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_d) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_t)$ que es continua (por $\mathcal{T}_d \supset \mathcal{T}_t$), pero su grafo es el conjunto $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ que no es cerrado en $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_d \times \mathcal{T}_t)$ pues $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ no es abierto (si U es un entorno de $(1, 0) \notin \Delta$, $U \supset \{1\} \times \mathbb{R}$ y por tanto $U \cap \Delta \neq \emptyset$.
Sea $\mathrm{Id} : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_d)$ que no es continua (pues $\{p\} \in \mathcal{T}_d$ pero $\mathrm{Id}^{-1}(\{p\}) = \{p\} \notin \mathcal{T}_u$), pero su grafo es el conjunto $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ que es cerrado en $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_u \times \mathcal{T}_d)$ pues su complementario es abierto (si $(x, y) \notin \Delta$, $(x, y) \in I(x, y) \times \{y\} \subset \mathbb{R}^2 \setminus \Delta$, donde $I(x, y)$ es el intervalo abierto de $\mathbb{R}$ de extremos x e y.

Topología cociente

Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y sea R una relación de equivalencia (reflexiva, simétrica y transitiva) en X. Sea X^* el conjunto de las clases de equivalencia (conjunto cociente). Sea $p : X \longrightarrow X^*$ la aplicación sobreyectiva (aplicación cociente) que lleva cada punto de X en su clase de equivalencia.
Consideramos en X^* la familia $\mathcal{T}^* = \{V \subset X^* \mid p^{-1}(V) \in \mathcal{T}\}$.

Proposición. $\mathcal{T}^*$ es una topología y es la más fina en X^* que hace que p sea continua.

Demostración. **a)** $p^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{T} \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{T}^*$. $p^{-1}(X^*) = X \in \mathcal{T} \Rightarrow X^* \in \mathcal{T}^*$.
b) Sea $\{V_i \mid i \in I\} \subset \mathcal{T}^* \Rightarrow p^{-1}(V_i) \in \mathcal{T}$ para todo $i \in I \Rightarrow p^{-1}(\bigcup_{i\in I} V_i) = \bigcup_{i\in I} p^{-1}(V_i) \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{i\in I} V_i \in \mathcal{T}^*$.
c) Sea $\{V_1, V_2, \ldots, V_n\} \subset \mathcal{T}^* \Rightarrow p^{-1}(V_i) \in \mathcal{T}$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\} \Rightarrow p^{-1}(\bigcap_{i=1}^n V_i) = \bigcap_{i=1}^n p^{-1}(V_i) \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcap_{i\in I} V_i \in \mathcal{T}^*$.
Es inmediato que $\mathcal{T}^*$ es la topología más fina en X^* que hace que p sea continua.

El espacio $(X^*, \mathcal{T}^*)$ se denomina **espacio cociente** de X ($\mathcal{T}^*$ es la **topología cociente**)

Observación. La noción de espacio cociente se puede definir también en términos de particiones de X, o, más en general, para cualquier aplicación suprayectiva de un espacio topológico X en un conjunto Z.

Ejemplos de espacios cociente

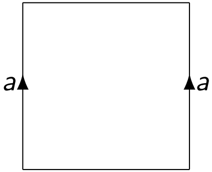
Ejemplo. Sea $X = \mathbb{R}$ y la partición de $\mathbb{R}$ dada por $P = \{(-\infty, 0), \{0\}, (0, \infty)\}$.
El conjunto cociente es de la forma $X^* = \{a, b, c\}$ y la aplicación cociente cumple $p((-\infty, 0)) = \{a\}$, $p(0) = b$, $p((0, \infty)) = \{c\}$.
La topología cociente es $\mathcal{T}^* = \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$.

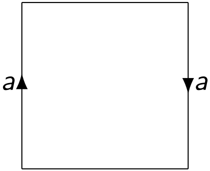
Ejemplo. Sea $X = \mathbb{R}$ y la partición de $\mathbb{R}$ dada por $P = \{A_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, donde $A_n = \{n\}$ si n es par, y $A_n = (n-1, n+1)$ si n es impar. Podemos identificar el conjunto cociente con $\mathbb{Z}$ y la aplicación cociente cumple $p(n) = n$ si n es par y $p(n-1, n+1) = \{n\}$ si n es impar. La topología cociente es la topología de la recta digital.
Así, la recta digital es espacio cociente de la recta real por la relación de equivalencia dada por la partición anterior.

Ejemplo. Sea $X = [0, 1]$ y la relación de equivalencia R dada por $xRy \Leftrightarrow x = y$ ó $|x - y| = 1$. El espacio cociente es homeomorfo a la circunferencia S^1 con la topología usual. Equivalentemente, diremos que la circunferencia es el espacio cociente resultante del intervalo $[0, 1]$ al identificar los extremos del intervalo a un punto.

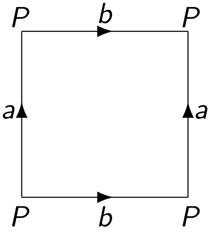
Ejemplos de espacios cociente

Supongamos que en el cuadrado de la derecha identificamos los puntos de los lados marcados a según la dirección de las flechas (es decir, identificamos cada punto de la forma $(0,x)$ con el punto $(1,x)$).
El conjunto cociente resultante es un **cilindro**.

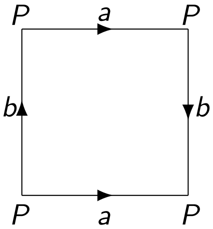




Supongamos que hacemos lo mismo cambiando el sentido de una de las flechas (es decir, identificamos cada punto de la forma $(0,1)$ con el punto $(1,1-x)$). El conjunto cociente resultante es una **banda de Moebius**.



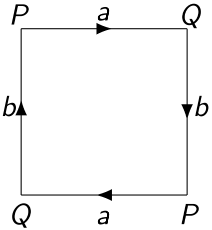
Si ahora identificamos los puntos marcados a por un lado y los marcados b por otro (lo que obliga a que los 4 vértices del cuadrado se identifiquen a un punto), el conjunto cociente resultante es un **toro**.

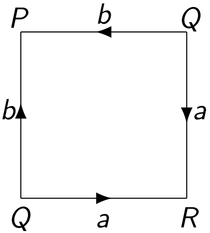


Si hacemos lo mismo cambiando el sentido de una de las flechas, los 4 vértices siguen yendo a un mismo punto, y el conjunto cociente resultante es una **botella de Klein**.

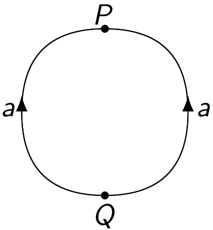
Ejemplos de espacios cociente

Supongamos que cambiamos el sentido de una de cada par de flechas (lo que hace que ya no todos los vértices vayan a un mismo punto). El conjunto cociente resultante es el **plano proyectivo**.

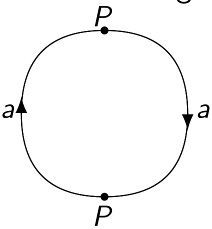




Si en vez de identificar lados opuestos identificamos lados adyacentes según la figura de la derecha, el conjunto cociente resultante es una **esfera**.



Una **esfera** puede obtenerse también a partir de un disco como se indica en la figura*.



Si cambiamos el sentido de una de las flechas, el conjunto cociente es el **plano proyectivo****.

*Una esfera puede obtenerse también a partir de un disco identificando todos los puntos del borde a un único punto. **El plano proyectivo puede obtenerse tambiém a partir de una esfera identificando puntos antipodales.

Topología cociente

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p"'] & Z \\
X^* \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}
$$

Teorema. Sea X^* un espacio cociente de X y $p : X \longrightarrow X^*$ la aplicación cociente. Sea Z otro espacio.

a) Sea $f : X^* \longrightarrow Z$ una aplicación y sea $g : X \longrightarrow Z$ la aplicación composición $g = fp$.
Entonces f es continua si y solo si g es continua.

b) Recíprocamente, si $g : X \longrightarrow Z$ es una aplicación que es constante sobre cada conjunto $p^{-1}(y)$, entonces g induce una aplicación $f : X^* \longrightarrow Z$ tal que $fp = g$.
Además, f es continua si y solo si g es continua.

Demostración. a) Si f es continua, entonces $g = fp$ es continua.
Recíprocamente, supongamos que g es continua. Sea V abierto de Z. Entonces $g^{-1}(V)$ es abierto en X. Pero $g^{-1}(V) = p^{-1}(f^{-1}(V))$ y como p es una aplicación cociente, se sigue que $f^{-1}(V)$ es abierto en Y.

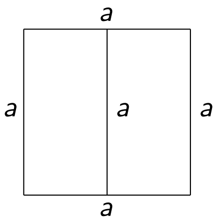
b) Como g es constante en $p^{-1}(y)$, si definimos $f(y) = g(p^{-1}(y))$ tenemos definida una función $f : X^* \longrightarrow Z$ tal que, para cada $x \in X$, $f(p(x)) = g(x)$.
Además, por (a), f es continua si y solo si g es continua.

Ejercicios de topología cociente

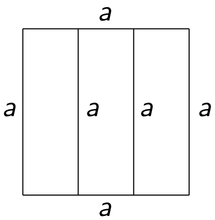
Ejercicio 17. ¿Qué espacio cociente se obtiene si en el intervalo $[0, 5]$ se identifican los enteros a un punto? ¿Y si se identifican los pares a un punto y los impares a otro?

Solución:

Ejercicio 18. Si en un cuadrado se identifica su frontera a un punto se obtiene una esfera. ¿Qué se obtiene si en el cuadrado de la derecha identificamos los puntos marcados con a a un mismo punto?



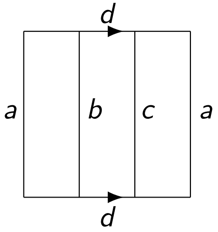
Solución:



¿Qué se obtiene si identificamos en el cuadrado de la izquierda los puntos marcados con a a un mismo punto?

Solución:

Ejercicios de topología cociente



Ejercicio 19. Supongamos que en el cuadrado de la derecha identificamos todos los puntos de a a un mismo punto, todos los puntos de b a un mismo punto, todos los puntos de c a un mismo punto, y para el caso de d identificamos cada punto $(x, 0)$ con el punto $(x, 1)$ ¿Qué se obtiene en este caso?

Solución:

Ejercicio 20. ¿Qué espacio cociente se obtiene si en la esfera colapsamos los puntos de un disco a un punto? ¿Y si colapsamos el ecuador a un punto? ¿Y si colapsamos un meridiano (que va del polo norte al sur, pero sin volver por el otro lado, a un punto? ¿Y si identificamos los polos?

Solución: